تأثير أنواع معينة من الزمر الجزئية
ذات خصائص مميزة على بنية الزمر المنتهية

إعداد الطالب

طالب محسن محمد الجفري

إشراف:

أ. د. سيد خالد نعمان

المستخلص

لتكن G زمرة منتهية ولتكن H وK زمرتان جزئيتان من الزمرة G. سنقول عن الزمرتين H وK أنهما تباديليتان إذا كانت $HK = KH$، أو بعبارة أخرى إذا كانت HK زمرة جزئية من الزمرة G، سوف ندرس أوجه مختلفة من بنية الزمر المنتهية عن طريق أفكار جديدة متضمنة لمفهوم التبادلية مدمجاً مع مفاهيم أخرى من نظرية الزمر، ولنكون أكثر دقة؛ فإننا سوف نقوم باستعراض مفهوم مجموعات-$\mathfrak{F}$ هول الكاملة (Complete Hall $\mathfrak{F}$-sets) و$\mathtt{Z}$-تبادلية ($\mathtt{Z}$-permutability) بالإضافة إلى مفهوم $\mathtt{SSH}$-زمرة جزئية.

لتكن G زمرة منتهية. إن تعريفنا لمفهوم مجموعات-$\mathfrak{F}$ هول الكاملة و$\mathtt{Z}$-تبادلية يتضمن أن $\mathtt{Z}$ عبارة عن مجموعة ملحقة بالزمرة G وأن $\mathfrak{F}$ عبارة عن فصل ملائم من فصول الزمر المنتهية. بشكل أوضح؛ فإن جميع عناصر المجموعة $\mathtt{Z}$ عبارة عن زمر هول (Hall) جزئية من الزمرة G تكون جميعها محتواه في الفصل $\mathfrak{F}$ بحيث أنه كل عدد أولي قاسم لرتبة الزمرة G يكون قاسماً لرتبة عنصر واحد فقط من عناصر المجموعة $\mathtt{Z}$. سنقول عن أي زمرة جزئية H من الزمرة G أنها $\mathtt{Z}$-تبادلية في G إذا كانت H تتبدل مع كل عنصر من عناصر $\mathtt{Z}$.

لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G. سنعرف H بأنها s-تبادلية في G إذا كانت H تتبدل مع كل سيلو (Sylow) زمرة جزئية من G. سنعرف أيضاً الزمرة H بأنها $\mathtt{H}$-زمرة جزئية في G إذا كانت $H^g \cap N_G(H) \leqslant H$ لكل عنصر g موجود في G. الهدف من مفهوم $\mathtt{SSH}$-زمرة جزئية هو إيجاد حلقة وصل بين كل من مفهومي s-تبادلية و$\mathtt{H}$-زمرة جزئية.

سوف نقوم بدراسة بنية الزمرة المنتهية G عندما تكون بعض الزمر الجزئية من G والتي يكون دليلها في زمر جزئية معينة من G عبارة عن عدد أولي محققة لمفهوم $\mathtt{Z}$-تبادلية، بالإضافة إلى ذلك؛ سوف ندرس الزمرة الكسرية H/H_G عندما تكون H زمرة جزئية تحت قياسية (subnormal) $\mathtt{Z}$-تبادلية في G. سوف تتم هذه التحقيقات عن بنية الزمرة المنتهية G بتناول مجموعات-$\mathfrak{F}$ هول الكاملة لفصول متنوعة من فصول الزمر المنتهية، من الناحية الأخرى؛ فإننا سوف نستخدم مفهوم $\mathtt{SSH}$-زمرة جزئية لدراسة بنية الزمرة المنتهية G عندما تكون بعض الزمر الجزئية ذات الرتب الأولية المرفوعة لقوى $\mathtt{SSH}$-زمراً جزئية من G.

The Impact of Certain Kinds of Subgroups with Special Properties on the Structure of Finite Groups

By

Taleb Mohsen Mohammed Al-Gafri

Supervised by

Prof. Syed Khalid Nauman

Abstract

Let H and K be subgroups of a finite group G. The subgroups H and K are said to be permutable if $HK = KH$, in other words, HK is a subgroup of G. We study different aspects about the structure of finite groups by introducing some new ideas involving permutability combined with other notions from group theory. Namely, we present the concept of complete Hall $\mathfrak{F}$-sets and $\mathtt{Z}$-permutability as well as the concept of $\mathtt{SSH}$-subgroups.

Let G be a group. In the concept of complete Hall $\mathfrak{F}$-set and $\mathtt{Z}$-permutability, we define $\mathtt{Z}$ to be a set that is associated with the group G and $\mathfrak{F}$ to be some suitable class of groups. More precisely, all the members of the set $\mathtt{Z}$ are Hall subgroups of G which are contained in $\mathfrak{F}$ with the additional property that for each prime $p \in \pi(G)$, p divides the order of only one member of $\mathtt{Z}$. We will say that a subgroup H of G is $\mathtt{Z}$-permutable in G if H permutes with every member of $\mathtt{Z}$.

Let H be a subgroup of a group G. We say that H is s-permutable in G if H permutes with every Sylow subgroup of G. Also, we say that H is an $\mathtt{H}$-subgroup in G if $H^g \cap N_G(H) \leqslant H$, for all $g \in G$. The notion of $\mathtt{SSH}$-subgroups provides a connection between the concepts of s-permutability and $\mathtt{H}$-subgroups.

We will examine the structure of a finite group G under the assumption that some subgroups of prime index of particular subgroups of G are $\mathtt{Z}$-permutable in G. In addition, we will examine the factor group H/H_G when H is a subnormal $\mathtt{Z}$-permutable subgroup of G. These investigations will be done by considering complete Hall $\mathfrak{F}$-sets for various classes of groups. On the other hand, we will use the concept of $\mathtt{SSH}$-subgroups to analyze the structure of G under the assumption that certain subgroups of prime power orders of G are $\mathtt{SSH}$-subgroups in G.